Inégalités de Dispersion pour l'Equation de Schrödinger sur les groupes de type H

Martin Del Hierro

Université de Cergy-Pontoise

Schrödinger sur $\mathbb{R}^n$

- **Equation et Opérateur**

$$u(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$(i\partial_t + \triangle)u = 0 \Longleftrightarrow u(x,t) = [e^{it\triangle}u_0](x)$$

Donnée initiale $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

- **Inégalité de Dispersion**

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq \frac{Cte}{t^{\frac{n}{2}}}\|u_0\|_1$$

Dispersion $\Longrightarrow$ Strichartz

Strichartz(1970) + Ginibre-Velo(1995) + Keel-Tao (1998)

Equation avec Second Membre:

$$(i\partial_t + \triangle)u = F$$

Soient $p_i, q_i > 2$ ($i = 1, 2$) tels que $\frac{2}{p_i} + \frac{n}{q_i} = \frac{n}{2}$

$$\|u\|_{L_t^{p_1} L_x^{q_1}} \leq Cte \left(\|u_0\|_2 + \|F\|_{L_t^{p_2'} L_x^{q_2'}} \right)$$

p_2' et q_2' conjugués de p_2 et q_2

Groupes de Type H

- $\mathcal{G}$ stratifié de rang 2
  - $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$
  - $\mathcal{G} = \textit{Lie}(\mathcal{G}_1)$
  - $[\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1] \subset \mathcal{G}_2$ et $[\mathcal{G}, \mathcal{G}_2] = \{0\}$
- $\mathcal{G}$ est muni d'une structure euclidienne: $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus^{\perp} \mathcal{G}_2$
- On définit une application linéaire $J : \mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_n(\mathcal{G}_1)$ par

$$\forall X, X' \in \mathcal{G}_1,\ \forall T \in \mathcal{G}_2; \qquad T \cdot [X, X'] = J(T)X \cdot X'$$

  - On impose $J(T)^2 = -|T|^2 \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_1}$
  - la dimension de $\mathcal{G}_1$ est paire, on la note n ou $2d$
  - la dimension p de $\mathcal{G}_2$ vérifie $p \leq 2d - 1$

Groupes de Type H

- G groupe connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$
  - $\mathcal{G}_1 = Vect(X_1, \ldots, X_n) \qquad \mathcal{G}_2 = Vect(T_1, \ldots, T_p)$
  - $(x, s) := \exp(xX + sT)$
  - $(x, s) \circ (x', s') = (x + x', s + s' + \frac{1}{2}[xX, x'X])$
- G est muni d'un sous-Laplacien canonique
  - $\triangle = -\sum_{i=1}^{n} X_i^2$
  - $\triangle$ opérateur différentiel sous-elliptique invariant à gauche
  - $\triangle$ indépendant du choix de la b.o.n $(X_1, \ldots, X_n)$
- G est muni d'une structure homogène
  - $\delta_r(x, s) := (rx, r^2 s)$
  - $\triangle(f \circ \delta_r) = r^2(\triangle f) \circ \delta_r$
  - $N = 2(d + p)$ est sa dimension homogène

$\mathbb{H}$ comme $\mathbb{H}$eisenberg

- Regardons dans une direction de $\mathcal{G}_2$, on la note $\epsilon \in S^{p-1}$: on peut construire une b.o.n. de $\mathcal{G}_1$

$$\mathcal{B}_\epsilon = (U_1^\epsilon, V_1^\epsilon, \dots, U_d^\epsilon, V_d^\epsilon)$$

Tel que $\quad \epsilon \cdot [U_i^\epsilon, V_j^\epsilon] = \delta_{ij}, \quad \epsilon \cdot [U_i^\epsilon, U_j^\epsilon] = \epsilon \cdot [V_i^\epsilon, V_j^\epsilon] = 0$

- Les fonctions radiales
  - f radiale $\iff \forall (x,s) \in G, \quad f(x,s) = f(|x|, s)$
  - Théorie $L^2_{rad}(\mathbb{H}^n) \rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow$ Théorie $L^2_{rad}(G)$

Fourier Radial

- On définit une famille de représentations unitaires irréductibles
  - $\Pi_\lambda : G \longrightarrow U\left(L^2(\mathbb{R}^d_\xi)\right) \qquad \lambda \in \mathbb{R}^p$
  - $\Pi_\lambda(U_j^\epsilon) = |\lambda|^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad \Pi_\lambda(V_j^\epsilon) = i|\lambda|^{\frac{1}{2}} \xi_j$ et $\Pi_\lambda(T_k) = \mathbf{i}\lambda_k.$
  - $\Pi_\lambda(\triangle) = -|\lambda| \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} - \xi_j^2 \right)$
- Fonctions d'hermite $h_\alpha \rightsquigarrow$ base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d_\xi)$

$$\Pi_\lambda(\triangle) h_\alpha = (2|\alpha| + d)|\lambda| h_\alpha$$

- Transformée de Fourier radiale
  - $\forall f \in L^1_{rad}(G), \qquad \mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_G f(g) \Pi_\lambda^*(g) dg$
  - $\mathcal{F}(\triangle f)(\lambda) h_\alpha = (2|\alpha| + d)|\lambda| \mathcal{F}(f)(\lambda) h_\alpha$

Formule d’Inversion

soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ suffisamment régulière, alors il existe une unique fonction $f \in L^2_{rad}(G)$ tel que:

$$\mathcal{F}(f)(\lambda)h_\alpha = f_{|\alpha|}(\lambda)h_\alpha$$

De plus on a l’expression explicite:

$$f((\omega,s)) := (\frac{1}{2\pi})^{d+p} \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^p} \exp[-\mathbf{i}\lambda\cdot s]\, f_m(\lambda)\mathcal{L}_m^{(d-1)}(\frac{|\lambda|}{2}\|\omega\|^2)|\lambda|^d\, d\lambda$$

Où $\mathcal{L}_m^{(d-1)}$ désigne la m-iéme fonction de Laguerre d’indice $d-1$.

$$\left|(\xi\frac{d}{d\xi})^N\left(\mathcal{L}_m^{(d-1)}(\xi)\right)\right| \le C_{N,d}(2m+d)^{d-1/4}$$

avec $0 \le N \le d$

Opérateur de Schrödinger

- Fonction de découpage $R^* \in C_0^\infty(C_0)$ paire
  - $C_0 = \{\tau \in \mathbb{R}; 1/2 \leq |\tau| \leq 4\}$
  - $0 \leq R^* \leq 1$
  - Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $R_m^*(\tau) := R^*((2m+d)\tau)$
- Fonction Test $\varphi \in \mathcal{S}_{rad}(G)$ définie par

$$\mathcal{F}\varphi(\lambda)h_\alpha = R^*_{|\alpha|}(|\lambda|)h_\alpha$$

- on pose $u_0 = \varphi$, et $g = (\omega, s)$

$$u(g,t) = Cte \sum_m \underbrace{\int_0^\infty \int_{S^{p-1}} \exp[-\mathbf{i}\lambda(\epsilon \cdot s - (2m+d)t)] R_m^*(\lambda) \mathcal{L}_m^{(d-1)}(\lambda \frac{\|\omega\|^2}{2}) \frac{d\lambda d\sigma(\epsilon)}{\lambda^{1-d-p}}}_{I(m)}$$

Dispersion et Strichartz

Théorème 1 (Inégalité de dispersion)**.** *Soit u la solution de l'équation de Schrödinger homogène. Alors, on a de facon optimale:*

$$\|u(t)\|_\infty \leq C|t|^{\frac{1-p}{2}} \|u_0\|_{B^{N-(p-1)/2}_{1,1}}$$

Théorème 2 (Inégalité de Strichartz)**.** *Soit u la solution de l'équation de Schrödinger non homogène, alors pour tout $q \in [\frac{2N+1-p}{p-1}, +\infty]$ et pour r vérifiant*

$$\frac{1}{q} + \frac{N}{r} = \frac{N}{2} - 1$$

On a:

$$\|u\|_{L^q_t L^r} \leq C \left(\|u_0\|_{\dot{H}^1} + \|F\|_{L^1_t \dot{H}^1} \right)$$

... Et les Ondes???

$$\begin{cases} \triangle u + \partial_{tt} u & = \quad F \\ u\Big|_{t=0} = u_0 \\ \partial_t u\Big|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

Théorème 3 (Inégalité de dispersion)**.** *Soit u la solution de l'équation des Ondes homogène ($F = 0$). Alors, on a de facon optimale:*

$$\|u(t)\|_\infty \leq C|t|^{-p/2} \left(\|u_0\|_{B_{1,1}^{N-p/2}} + \|u_1\|_{B_{1,1}^{N-1-p/2}} \right)$$

Théorème 4 (Inégalité de Strichartz)**.** *Soit u la solution de l'équation des Ondes non homogène, alors pour tout $q \in [\frac{2N-p}{p}, +\infty]$ et pour r vérifiant $\frac{1}{q} + \frac{N}{r} = \frac{N}{2} - 1$*

$$\|u\|_{L_t^q L^r} \leq C \left(\|u_0\|_{\dot{H}^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L_t^1 L^2} \right)$$

Phase Stationnaire

Lemme 5 (Inégalité de la phase Stationnaire)**.** *Soit* $\phi \in C^{\infty}(]a,b[)$ *tel que:*

$$|\phi''(u)| \geq 1 \qquad \textit{sur }]a,b[$$

Alors quelque soit la famille de fonctions $\psi_t \in C_c^{\infty}(]a,b[)$

$$\left| \int_a^b e^{\mathbf{i}t\phi(u)} \psi_t(u)\, du \right| \leq C t^{-1/2} \int_a^b |\psi_t'(u)|\, du$$

La constante C *ne dpend ni des param*$\grave{e}$*tres t,a ou b; ni des fonctions* ψ_t *ou* ϕ*.*